多自由度ハミルトン力学系のダイナミクスと相空間構造

小西哲郎
名古屋大学大学院理学研究科物質理学専攻 (物理)
464-8602 名古屋市千種区不老町 konishi@phys.nagoya-u.ac.jp
http://jegog.phys.nagoya-u.ac.jp/~tkonishi/research/

Nov.14, 2003

Abstract

この講演は古典ハミルトン系のダイナミクスに付いての2つの話題からなります。はじめに、不変多様体のホモクリニック振動 (これはカオスの源でもある) の解析的表現を構成する話を紹介します。次に、長距離相互作用をする系において発見された、2点相関関数がべき型になる現象について紹介します。

第1部：特異摂動を用いての不変多様体の構成

力学系のカオス的挙動は、通常は解析的には表現できないものと考えられています。(カオス軌道そのものの解の表式が通常は得られないため。) しかし、最近開発された方法を用いることにより、安定および不安定多様体の振動の様子を解析的に表示することが出来るようになりました。[LST89, HM93, TTJ94, NH96, TTJ98] この解析的な表現により、例えば不変多様体どうしの交差角がどれくらい小さいかといった、相空間構造についての有益な情報が得られます。

第1部の内容は、平田吉博氏および野崎一洋氏との共同研究によります。 [HNK99a, HNK99b].

1.1 model

モデルとして、次の「ダブルウェル写像」

$$
\begin{aligned}
(q_1, q_2, p_1, p_2) \mapsto (q_1', q_2', p_1', p_2') & \\
p_1' &= p_1 - \varepsilon(2p_1^3 - p_1) - \varepsilon^3 \kappa q_2^2 \qquad (1) \\
p_2' &= p_2 - \varepsilon(2p_2^3 - p_2) - 2\varepsilon^3 \kappa q_1 q_2 \\
q_i' &= q_i + \varepsilon p_i' \quad (i = 1, 2)
\end{aligned}
$$

およびその拡張版を考える。ここで、ε と κ は実数の定数であり、それぞれ時間ステップと結合定数を表す。このモデルは、ダブルウェル (2谷) ポテンシャル中の1粒子の運動を時間を離散化したものである。以下の解析はこのモデルに限ったものではない。このモデルは原点 $(0,0,0,0)$ に不安定な不動点をもつ。

1.2 不安定多様体 W^u の解析的表現を得ること:アウトライン

まず、この写像を q_i についての2次の差分方程式に書き直す。

$q(t)$ を $q_i(t) \equiv q_i$, $q(t+\varepsilon) \equiv q_i'$ と定義する。そして、t を連続変数とみなす。この t は不変多様体をパラメトライズする。$t = 0$ を不変多様体の主交点 (the principal intersecting point) に対応させる。ここか

らは、簡単のために、1次元の部分多様体 $q_1(t) = q_2(t)$ を考える。形式的なテイラー展開

$$q_i(t \pm \varepsilon) = q_i(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\pm\varepsilon)^k}{k!} \frac{d^k}{dt^k} q_i(t)$$

により、無限階の常微分方程式が得られる：

$$\ddot{q}_1 = q_1 - 2q_1^3 - \varepsilon^2 \kappa q_2^2 - 2\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2(k-1)}}{(2k)!} \frac{d^{(2k)}}{dt^{(2k)}} q_1 \ , \quad \ddot{q}_2 = q_2 - 2q_2^3 - 2\varepsilon^2 \kappa q_1 q_2 - 2\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2(k-1)}}{(2k)!} \frac{d^{(2k)}}{dt^{(2k)}} q_2$$

もしもこの方程式を ε についての次数ごとに解くことが出来れば、安定及び不安定多様体が解として得られることになる。

しかし、こうして得られた解は $q_j(t) = q_j(-t)$, すなわち、分離しないセパラトリクスを表しており、カオスを表していない。さらに、この解は複素 t 平面の $t = \frac{\pi}{2}i$ で発散する。

1.3 結果

得られた解が $t = \frac{\pi}{2}i$ で発散するので、変数を変換する：

$$(t, q) \mapsto (z, \Phi) \ \ ; z \equiv \frac{1}{\varepsilon}(t - \frac{\pi}{2}i) \ \ , \Phi_i(z) \equiv \varepsilon q_i(t) \ , \Phi_i(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z^{2k}} \ .$$

ボレル変換 (逆ラプラス変換) $V(p) \equiv L^{-1}\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{(2k)!} p^{2k}$ により、以下の解を得る (詳しくは [HNK99a] をご参照下さい):

$$\begin{aligned}
q_j(t) &= \mathrm{sech}(t) + \varepsilon^2 q_{j,01}(t) + M(t,\varepsilon)B(t,\varepsilon) \ ; \ \text{ここで}\ M(t,\varepsilon) = -S(t,\varepsilon)\frac{5}{2}\frac{c}{\varepsilon^4}\exp\left(-\frac{\pi^2}{\varepsilon}\right) \ , \\
B(t,\varepsilon) &= -\frac{3}{4}\pi \sinh(t)\mathrm{sech}^2(t)\cos\frac{2\pi t}{\varepsilon} + \left(\frac{3}{2}\mathrm{sech}(t) - \frac{1}{2}\cosh(t) - \frac{3}{2}t\sinh(t)\mathrm{sech}^2(t)\right)\sin\frac{2\pi t}{\varepsilon} \\
S(t,\varepsilon) &= 2\Theta(t) \ \ (\Theta(t)\ \text{は Heaviside 関数。})
\end{aligned} \tag{2}$$

ここで、特異的に小さな係数 $\exp\left(-\frac{\pi^2}{\varepsilon}\right)$. は特に注目に値する。この係数は、もとの写像の「加速度部分」$q(t+\varepsilon) - 2q(t) + q(t-\varepsilon)$ から、次のようにして得られる：

$$e^{-pz}|_{p=2\pi ik} = \exp\left[2\pi ik\varepsilon(t - \frac{\pi}{2}i)\right] = \exp\left(-\frac{\pi^2}{\varepsilon}\right) e^{\left(-i\frac{\pi}{\varepsilon}t\right)} \tag{3}$$

$(z = (t - \frac{\pi}{2}i))$ 従って、この特異的に小さな項は、「標準型」のシンプレクティック写像に共通して見られるものである。

図1に見られるように、得られた解 (2) ともとの写像 (1) の数値解 とは極めて良い一致を示す。

2 高次元系

写像 (1) を高次元に拡張した写像も同様に扱うことが出来る。N 自由度系では $2N$ 次元の相空間の中に N 次元の安定および不安定多様体がある。これらの間の交差角は

$$|\theta_{N,N}| < \frac{C}{\varepsilon^5}\exp\left(-\frac{\pi^2}{\varepsilon}\right) \ , \quad \theta_{k,k} = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \ \ (k \neq N) \ ,$$

と求められる。すなわち、1次元方向だけが特異的に小さい。 [HNK99b].

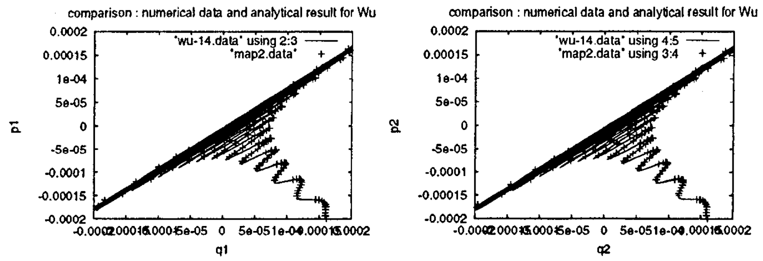


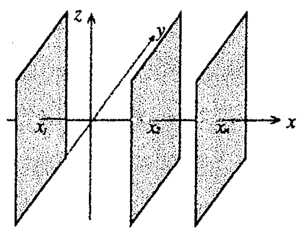
Figure 1: 写像 (1) の数値解 (+) と、解析的に得られた不変多様体 (実線)(2) の比較

第2部 :1次元自己重力系におけるべき型相関の自発形成

第 2 部の内容は、小山博子氏との共同研究による。 [KK01, KK02a, KK02b].

多自由度ハミルトン系の典型的な振舞いと言えば、「熱平衡」と思われている。熱平衡状態では、多くの場合は空間相関は消失している。しかし、或る種のハミルトン系では、秩序の自発形成、変形、といった、非熱的振舞いが生じる。ここでは、そうした系の例のひとつとして、1 次元自己重力系の動的振舞いを紹介する。

3 model



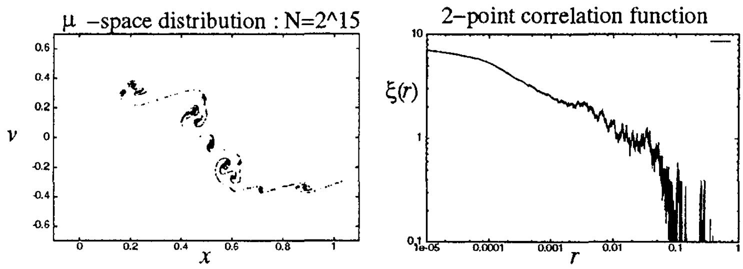
1 次元自己重力系は次のように定義される ([KK01], およびそこでの引用文献参照)

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} + 2\pi G m^2 \sum_{i>j} |x_i - x_j| \ , \ -\infty < x_i < \infty \ . \qquad (4)$$

この系は模式的には左の図のように表される。

4 2点相関関数とそのべき的振舞い

2 点相関関数 $\xi(r)$ は $dP = ndV\,(1+\xi(r))$. として定義される。一様で無相関な場合には $\xi(r) = \mathrm{const.}$ だが、初期条件によっては、この系ではべき型の振舞いを示す : $\xi(r) \propto r^{-\alpha}$



左の図は初期条件は $v_i(0) = 0$,$x_i(0) =$ uniformly random. 系の大きさは $N = 2^{15}$ としたときの、μ-空間での分布のスナップショットと、同じ時刻での $\xi(r)$ である。$\xi(r)$ のべき型の振舞いが見られる。

さらに詳しい計算によると、このべき型の相関は小さな空間スケールで発生しその後大きなスケールへと成長している。すなわち、或る種の「階層的クラスター化」を起こしているのである。 [KK02a]

References

[HM93] Vincent Hakim and Kirone Mallick. Exponentially small splitting of separatrices, matching in the complex plane and Borel summation. *Nonlinearity*, 6:57–70, 1993.

[HNK99a] Yoshihiro Hirata, Kazuhiro Nozaki, and Tetsuro Konishi. Exponentially small oscillation of 2-dimensional stable and unstable manifolds in 4-dimensional symplectic mappings. *Prog. Theor. Phys.*, 101:1181–1185, 1999.

[HNK99b] Yoshihiro Hirata, Kazuhiro Nozaki, and Tetsuro Konishi. The intersection angles between n-dimensional stable and unstable manifolds in $2n$-dimensional symplectic mappings. *Prog. Theor. Phys.*, 102:701–706, 1999.

[KK01] H. Koyama and T. Konishi. Emergence of power-law correlation in 1-dimensional self-gravitating system. *Phys. Lett. A*, 279:226–230, 2001.

[KK02a] H. Koyama and T. Konishi. Hierarchical clustering and formation of power-law correlation in 1-dimensional self-gravitating system. *Europhys. Lett.*, 58:356–361, 2002.

[KK02b] H. Koyama and T. Konishi. Long-time behavior and relaxation of power-law correlation in one-dimensional self-gravitating system. *Phys. Lett. A*, 295:109–114, 2002.

[LST89] V. F. Lazutkin, I. G. Schachmannski, and M. B. Tabanov. Splitting of separatrices for standard and semistandard mappings. *Physica*, D 40:235–248, 1989.

[NH96] Katsuhiro Nakamura and Masato Hamada. Asymptotic expansion of homoclinic structures in a symplectic mapping. *J. Phys.*, A 29:7315–7327, 1996.

[TTJ94] Alexsander Tobvis, Masa Tsuchiya, and Charles Jaffé. Exponential asymptotic expansions and approximations of the unstable and stable manifolds of the Hénon map. preprint, 1994.

[TTJ98] Alexsander Tobvis, Masa Tsuchiya, and Charles Jaffé. Exponential asymptotic expansions and approximations of the unstable and stable manifolds of singularly perturbed systems with the Hénon map as an example. *Chaos*, 8:665–682, 1998.